Seminar “Grobgeometrie und topologische Phasen”

Matthias Ludewig

Sommersemester 2025

Teil I: Grobgeometrie

0. (8.4.2025) Crashkurs C^*-Algebren und K-Theorie. — (Bei Bedarf) Einführung in die Grundbegriffe der Theorie von C^*-Algebren und deren K-Theorie, sowie die exakte Sechs-Term-Sequenz.

1. (22.4.) Grobe Räume — Einführung der Begriffe *(eigentliche) Grobstruktur*, *grobe Abbildung*, *grobe Äquivalenz* [13, §2.1], [2, §6.1], [12, §2]. Evtl. Vergleich mit Begriffen der metrischen Geometrie [13, §1.3]. Als Beispiel möglicherweise Diskussion des Satzes von Milnor-Švarc (Thm. 1.18 in [13]).

2. (29.4.) Roe-Algebren — Definition der *Roe-Algebra* eines metrischen Raumes [12, §3], [2, §6], [1, §2]. Diskussion der “Funktorialität” unter groben Abbildungen und Unabhängigkeit von Wahl des X-Moduls [2, Lemma 6.3.11 & Prop. 6.3.12], [1, Thm. 2.1]. Diskussion des Satzes, dass die K-theorie der Roe-Algebra auf *schlaffen* Räumen verschwindet [12, Def. 9.3 & Prop. 9.4], [2, Lemma 6.4.2], [3, Prop. 1], [1, Prop. 3.9].

3. (6.5.) Die grobe Mayer-Vietoris-Sequenz — Diskussion von *großen Familien* und *lokalisierten Roe-Algebren* [4, III.5 & III.6]. Anschließend Einführung der *Mayer-Vietoris-Sequenz* für grobe K-Theorie [12, §9], [3, §5], [1, §3.4]. In der Literatur ist dies für “grob ausschneidende Partitionen” gemacht [12, Def. 9.1]. Praktischer ist es, stattdessen das Resultat für große Familien zu formulieren (also Teilmengen jeweils durch die erzeugte große Familie zu ersetzen), dann braucht man keine weitere Bedingung und erhält die MV-Sequenz in der Form von [4, §V]. Berechnung der K-Theorie-Gruppen $K_i(C^*(\mathbb{R}^d)) \cong K_i(C^*(\mathbb{Z}^d))$ durch wiederholtes Anwenden der Mayer-Vietoris-Sequenz sowie der Schlaffheit von Halbräumen [1, §3.8].

4.* (13.5.) Vergleich mit der Gruppen-C^*-Algebra — Definition der *(reduzierten) Gruppen-C^*-Algebra* $C^*_r(\Gamma)$ einer diskreten Gruppe Γ. Für $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ Diskussion des Isomorphismus $C^*_r(\mathbb{Z}^d) \cong C(\mathbb{T})$ und Berechnung der K-Theorie. Definition der Abbildung

$C_r^*(\mathbb{Z}^d) \otimes \mathbb{K} \to C^*(\mathbb{R}^d)$ und Berechnung der induzierten Abbildung in K-Theorie [1, §4] (es reicht hier, sich auf den reellen Fall einzuschränken).

Teil II: Topologische Phasen

5. (20.5.) Gittersysteme und Chern-Isolatoren — Diskussion von translationsinvarianten Hamiltonians auf Gittersystemen und deren Klassifikation über der *Brillouinzone* durch Berrykrümmung. Zur mathematischen Theorie der Vektorbündel und charakteristischen Klassen in Verbindung setzen. Explizite Beschreibung eines *Chern-Isolators* [4, Ex. IV.1].

6. (27.5.) Nichtkommutativer Zugang — Beschreibung eines topologischen Isolators mithilfe von C^*-Algebren [4, §I]. Beziehung zum translationsinvarianten Setting unter Zuhilfenahme des Materials von Vortrag 4. Diskussion von Beispielen, insbesondere das des Landau-Hamiltonians $H_A = (d - iA)^*(d - iA)$ in $\mathbb{R}^2$, inklusive der Aussage, dass dies eine nichttriviale Klasse liefert [5], siehe auch Ex. 5.3. in [6] und die Referenzen dort.

7. (27.5.) Gap-Filling — Wenn ein Hamiltonian mit Spektrallücke einen topologischen Isolator beschreibt, dann verschwindet die Spektrallücke nach Einschränkung auf einen berandeten Bereich. Diskussion dieses *Gap-Filling*-Prinzips nach [4, §VI], siehe auch [5, Thm. 2], [6, Thm. 3.4].

8. (3.6.) Edge-Traveling — Für zweidimensionale topologische Isolatoren lässt sich nach Einführung eines Randes ein Randstrom beobachten. Beschreibung dieses *Edge-Traveling*-Phänomens nach [4, §VII] (siehe auch [6, §6], aber diese Beschreibung ist komplizierter). Für experimentelle Beobachtung siehe die Videos zum Artikel [10].

9. (10.6.) Lokalisierte Wannierbasen — Diskussion und Beweis der Aussage, dass der spektrale Unterraum, der durch nichttriviale topologische Isolatoren definiert wird, keine Orthonormalbasis von lokalisierten Funktionen zulässt [7].

10. (17.6.) Grobe Kohomologie — Einführung der *groben Kohomologie* [11, §2.2], siehe auch §4.2 in [14] (nur den nicht-equivarianten Fall betrachten). Diskussion der Mayer-Vietoris-Sequenz für grobe Kohomologie und Berechnung im Fall von $\mathbb{R}^n$. Evtl. auch Diskussion der Charakterabbildung $HX^\bullet(M) \to H_c^\bullet(M)$ [11, 2.11]. Nachweis, dass für eine grob transversale Partition $A_0, \dots, A_q$ (siehe Def. 2.5 in [8]) die Funktion

$$\varphi(x_0, \dots, x_n) := \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \chi_{A_0}(x_{\sigma_0}) \cdots \chi_{A_q}(x_{\sigma_q})$$

eine grobe Kohomologieklasse auf M in Grad n definiert, wobei χ_{A_i} die Indikatorfunktion von A_i ist.

11.* (24.6.) "Messung" via grobe Kohomologie — Durch geschickte Wahlen von Kohomologieklassen kann man Nichttrivialität von Isolatoren "messen" (also entscheiden, ob sie topologisch sind). In [8] ist dies in Dimension 2 behandelt. Die Paarung einer Projektion endlicher Ausbreitung mit einer Partition ist in §2.3 definiert, das Quantisierungsargument ist in §2.1 und §2.5 diskutiert. Zur Einfachheit der Darstellung ist es ratsam, sich hier auf Projektionen endlicher Ausbreitung zu beschränken. Diskussion der physikalischen Bedeutung (§5.4). Zur physikalischen Anwendung siehe Videos zu [9].

References

[1] E. E. Ewert and R. Meyer. Coarse geometry and topological phases. *Comm. Math. Phys.*, 366(3):1069–1098, 2019.

[2] N. Higson and J. Roe. *Analytic K-homology.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2000. Oxford Science Publications.

[3] N. Higson, J. Roe, and G. Yu. A coarse Mayer-Vietoris principle. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 114(1):85–97, 1993.

[4] M. Ludewig. Coarse geometry and its applications in solid state physics. In R. Szabo and M. Bojowald, editors, *Encyclopedia of Mathematical Physics (Second Edition)*, pages 78–88. Academic Press, Oxford, second edition edition, 2025.

[5] M. Ludewig and G. C. Thiang. Gaplessness of Landau Hamiltonians on hyperbolic half-planes via coarse geometry. *Comm. Math. Phys.*, 386(1):87–106, 2021.

[6] M. Ludewig and G. C. Thiang. Cobordism invariance of topological edge-following states. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 26(3):673–710, 2022.

[7] M. Ludewig and G. C. Thiang. Large-scale geometry obstructs localization. *J. Math. Phys.*, 63(9):Paper No. 091902, 8, 2022.

[8] M. Ludewig and G. C. Thiang. Quantization of conductance and the coarse cohomology of partitions, 2023. `https://arxiv.org/abs/2308.02819`.

[9] N. P. Mitchell, L. M. Nash, D. Hexner, and et al. Amorphous topological insulators constructed from random point sets. *Nature Physics*, 14:380–385, 2018.

[10] L. M. Nash, D. Kleckner, A. Read, V. Vitelli, A. M. Turner, and W. T. M. Irvine. Topological mechanics of gyroscopic metamaterials. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(47):14495–14500, 2015. `https://www.pnas.org/doi/10.1073/pnas.1507413112`.

[11] J. Roe. Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 104(497):x+90, 1993.

[12] J. Roe. *Index theory, coarse geometry, and topology of manifolds*, volume 90 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[13] J. Roe. *Lectures on coarse geometry*, volume 31 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[14] C. Wulff. Equivariant coarse (co-)homology theories. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 18:Paper No. 057, 62, 2022.